JOAQUÍN-SILVIO MARTÍNEZ VICENTE

Un ensayo de estimación completa de una función de producción CES*

La función de producción agregada ha sido y es un concepto muy controvertido en la teoría económica; a pesar de lo cual es usualmente empleada, tanto por estudios teóricos como empíricos.

Así como la función de producción empresarial responde a un concepto intuitivo, la función de producción agregada no es en absoluto intuitiva y pone de manifiesto, con toda su intensidad, los numerosos y graves obstáculos que plantea la agregación. Pero como decíamos antes, la función de producción agregada sigue empleándose, y acaso con más asiduidad que antes, en numerosos estudios empíricos porque resulta útil y no hay otro concepto que sea menos discutible y, al menos, tan útil como éste.

Dejando aparte la polémica que plantea la agregación de las variables en la función de producción, queremos apuntar que la hipótesis fundamental que incorpora la función de producción neoclásica es la que en términos matemáticos se denomina «homogeneidad».

Esta hipótesis, que fue ridiculizada por Edgeworth,[1] con su conocida frase «la justicia es un cubo perfecto, dice la sabiduría antigua, y la conducta racional es una función homogénea, añade el sabio actual», se ha revelado, sin embargo, muy fructífera, como lo prueba el que se siga manteniendo. Además, la hipótesis de homogeneidad implica que esta «ley económica» fundamental puede escribirse en forma de productos de monomios, si se hacen las transformaciones oportunas,[2] y esto resulta muy conveniente.

* El presente trabajo es un resumen de una parte del estudio *Ensayo de determinación de funciones de producción agregadas en la ganadería española,* leído como tesis doctoral en la E.T.S.I. Agrónomos de Madrid, en diciembre de 1973.

1. Citado por G. Stigler en *Teoría de los precios,* ed. Derecho Privado, Madrid, 1968, p. 185.
2. Véase, por ejemplo, J. Palacios, *Análisis Dimensional*, ed. Espasa Calpe, S. A., Madrid, 1964, pp. 67-68, y F. de Jong, *Dimensional Analysis for Economists,* North-Holland, Amsterdan, 1967. Especialmente, pp. 38-46, dedicadas a las dimensiones de las funciones CES y las pp. 51-56, dedicadas al terreno de PI o teorema de Buckingham.

En este trabajo se ofrece un ejemplo de estimación completa de una función de producción CES, y no se discute nada acerca de la validez del concepto, de lo cual se sigue que éste se considera provechoso, al menos por el momento. El plan es el siguiente: primero se hace un breve comentario y exposición de algunos métodos empleados para estimar funciones CES. A continuación (sección II) se ofrecen diversas maneras alternativas de definir y medir las variables de los modelos, para acabar concretando cuáles se utilizarán aquí. La tercera sección se dedica a la estimación propiamente dicha; al análisis de resultados, se destina la sección cuarta. En la sección quinta se hacen algunas aplicaciones del modelo estimado. La última sección (VI) es el resumen y conclusiones del trabajo.

SECCIÓN I

Desde la aparición del trabajo de ACMS se han publicado numerosos estudios acerca de la función de producción que utilizan como ecuación —única o central— de los modelos, las CES. Entre ellos, merecen citarse, por su originalidad en el planteamiento y/o métodos de estimación propuestos, los de Maddala y Kadane,[3] que plantean un modelo triecuacional, con objeto de estimar la elasticidad de sustitución. Las ecuaciones son las siguientes:

$$Y = A[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)N^{-\rho}]^{-1/\rho}e^{-v_1}$$
$$\log Y/N = C_1 + \sigma \log \omega + v_2; \; C_1 = - \sigma \log (1 - \delta) + (1 - \sigma) \log \gamma$$
$$\log Y/K = C_2 + \sigma \log r + v_3; \; C_2 = - \sigma \log \delta + (1 - \sigma) \log \gamma$$

Donde Y representa la producción, N el trabajo, K el stock de capital, ω el salario y r la tasa de interés. Se supone, por tanto, que la función tiene vigencia en un mercado de competencia perfecta. Las v, o perturbaciones aleatorias, cumplen las hipótesis de homoscedasticidad.

La conclusión de estos dos autores es que las estimaciones están claramente sesgadas a la baja, excepto cuando el estimador de ρ tiene un valor próximo a la unidad. Pero en este caso, afirman, es preferible utilizar el método de ACMS.

Otro trabajo publicado en 1966, que pretendía estimar ρ fue el de Drhymes.[4] Plantea un CES bifactorial, sin las hipótesis restrictivas de rendimientos constantes a escala y mercado de competencia perfecta; pero supone que las empresas dividen la cantidad de trabajo que utilizan de tal manera que maximicen sus beneficios, para unas condiciones dadas de oferta y demanda de

3. G. S. MADDALA, y J. B. KADANE, «Some Notes on the estimations of the Constant Elasticity of Substitution Production Function», en *Review of Economic and Statistcs,* 1966, pp. 340 y 344.
4. P. J. DRHYMES, «Some Extensions and Test for the CES Class of Productions Functions», *Review of Economics and Statistics,* vol. 47, noviembre, 1965, pp. 357 a 366.

trabajo. El método implica la utilización de mínimos cuadrados entre log N, log Y, y log ω .

Las estimaciones se basan en un modelo de ecuaciones simultáneas, donde Y y ω son variables exógenas, en contra de la hipótesis hecha al principio de que los mercados no eran de competencia perfecta.

Poco después, Drhymes publicó otro trabajo,[5] en el que hace una estimación por el método de la máxima verosimilitud de un modelo triecuacional, en un contexto de ajuste dinámico al nivel óptimo de empleo de los factores. En opinión de este autor, el método tiene dos ventajas.[6]

«Primero, no es necesario hacer la hipótesis de que las empresas se encuentran en la situación de equilibrio. Segundo, porque con sólo admitir que la situación tiende al equilibrio, tenemos más campos para elegir los datos.»

Anterior a éste es el trabajo de otros dos pioneros de las estimaciones de funciones de producción agregada. Nos referimos al de Bodkin y Klein,[7] que estiman paralelamente una Cobb-Douglas (C-D) y una CES, para modelos uniecuacionales y modelos de ecuaciones simultáneas en ambos supuestos. El objetivo principal del artículo es estimar la elasticidad de sustitución, medir el cambio tecnológico y los rendimientos a escala. El objetivo secundario es demostrar que el método de mínimos cuadrados puede conducir a estimaciones equivocadas siendo preferible el de máxima verosimilitud. Como reconocen los propios autores, el primer objetivo lo consiguieron con más éxito que el segundo. Las estimaciones por medio de la función CES, parecen ser más acordes con la realidad que las procedentes de los modelos con funciones C-D, pues aquéllos proporcionan evidencia de rendimientos crecientes a escala, elasticidad de sustitución entre 0,5 y 0,7 y progreso tecnológico no neutral. J. Kmenta propuso [8] un método de estimación consistente en «linearizar» el modelo y estimar por mínimos cuadrados los coeficientes. Kmenta plantea alternativamente modelos uniecuacionales y modelos de varias ecuaciones (éstos con precios uniformes y con precios no uniformes). Sin perjuicio de hacer una referencia a las conclusiones del artículo, nos interesa destacar el método de estimación de los modelos uniecuacionales. La función de producción CES, sin la hipótesis de rendimiento constantes a escala, es:

$$Y = \gamma[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)N^{-\nu/\rho}$$

que se transforma fácilmente en esta otra:

$$\log Y = \log \gamma - \frac{\nu}{\rho} \log\ [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)N^{-\rho}] + u$$

5. P. J. DRHYMES, «Adjustment Dynamics and the Estimation of the CES Class of Production Functions», *International Economic Review*, vol. 8, núm. 2, junio, 1967, pp. 209-217.
6. *Ibid.*, pp. 215-216.
7. R. G. BODKIN, y L. R. KLEIN, «Nonlinear Estimation of Aggregate Productions Functions», *Review of Economics and Statistics*, vol. 8, núm. 2, 1967, pp. 28-44.
8. J. KMENTA, «On Estimation of the CES Production», *International Economic Review*, vol. 8, núm. 2, 1967, pp. 180-189.

siendo *u* la variable que representa las perturbaciones aleatorias. El segundo término del segundo miembro puede ser desarrollado por el teorema de Taylor, para $\rho = 0$.[9]

$$\log Y = \log \gamma + \nu\delta \log K + \nu(1 - \delta) \log N - \frac{1}{2} \rho\nu\delta(1 - \delta).$$
$$[\log K - \log N]^2 + A + u.$$

siendo A los términos del polinomio con exponente de ρ superior a uno.

En este desarrollo pueden ser separadas dos partes, una que corresponde a una forma *C-D* y otra que representa una «corrección» debida a la desviación de σ respecto a 1 (o de ρ, respecto de 0). Kmenta calcula los errores de aproximación de las CES para los distintos valores de N/K, a medida que ρ se aleja de 0. Para el valor estimado de σ, ($\hat{\sigma} = 0{,}4884$), la tabla muestra que la relación $\hat{Y}/Y_{ex}$ oscila entre 0,9724 y 0,996, según que el ratio N/K valga 0,1 o 10,0 respectivamente. En el trabajo se utilizan datos de una serie histórica, para el período 1947 a 1960. Además, se admite que $\hat{\delta} = 0{,}519$, tomado de otro estudio. Los estimadores de otros parámetros son, respectivamente, $\hat{\gamma} = 0{,}1112$ y $\hat{\nu} = 1{,}1785$ ($\pm$ 0,1487).

El método propuesto por Kmenta ha sido utilizado —con modificaciones— profusamente en posteriores estimaciones de modelos que incluyen funciones de producción CES. Sin embargo, no está exento de críticas. Así, M. D. McCarthy[10] objeta que una aproximación con la efectuada por Kmenta comporta una indeterminación notable, porque la «función-aproximada» es una aproximación de un grupo de funciones entre las que la CES es un caso particular. En efecto, considérese una función:

$$Y = \gamma[\delta_1 K^\alpha + \delta_2 K^\beta N^{\alpha-\beta} + \delta_3 N^\alpha]^{1/\alpha}$$
$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$$

en donde dividiendo por N y tomando logaritmos, tenemos

$$\log Y = \log \gamma + \frac{1}{\alpha} \log \left[\delta_1 \left(\frac{K}{N}\right)^\alpha + \delta_2 \left(\frac{K}{N}\right)^\beta + \delta_3\right] + \log N$$

Desarrollando por serie de Taylor para α y β iguales a cero, y despreciando los términos de grado superior a dos,

$$\log Y = \log \gamma + (\delta_1\alpha + \delta_2\beta) \log \frac{K}{N} + \frac{1}{2} \left[\delta_1 \left(\log \frac{K}{N}\right)^2 \alpha^2 - \right.$$
$$- \delta_1^2 \left(\log \frac{K}{N}\right)^2 \alpha^2 - 2\,\delta_1\delta_2 \left(\log \frac{K}{N}\right)^2 \beta\alpha + \delta_2 \left(\log \frac{K}{N}\right)^2 \beta^2 -$$

9. Podrían escogerse otros «valores probables» de ρ.

10. M. D. McCarthy, «Approximation of the CES Production Functions: A Comment», *International Economic Review*, vol. 8, núm. 2, 1967, pp. 190 a 192.

$$\delta_2^2 \left(\log \frac{K}{N} \right)^2 \beta^2 \Big] = \log \gamma + (\delta_1\alpha + \delta_2\beta) \log \frac{K}{N} + \frac{1}{2}$$

$$\left[\delta_1\alpha^2 - \delta_1^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2 - \delta_2^2\beta^2 - 2\delta_1\delta_2\alpha\beta \left(\log \frac{K}{N} \right)^2 \right]$$

Tomando antilogaritmos tenemos:

$$Y = \gamma N^{1-(\delta_1\alpha+\delta_2\beta)/\alpha} K^{(\delta_1\alpha+\delta_2\beta)/\alpha} \left(\frac{K}{N} \right)^{\lambda \log \frac{K}{N}}$$

siendo

$$\lambda = \frac{1}{2\,\alpha} \left[\alpha^2\delta_1(1 - \delta_1) + \beta^2\delta_2(1 - \delta_2) - 2\,\delta_1\delta_2\alpha\beta \right]$$

El paralelismo entre esta ecuación y la aproximada por Kmenta resulta evidente con tal de tomar antilogaritmos en la aproximación de la CES. En efecto,

$$\log Y = \log \gamma + \nu\delta \log K + \nu(1 - \delta) \log N - \frac{1}{2} \rho\nu\delta(1 - \delta)$$

$$[\log K - \log N]^2 \quad \hat{Y} = N^{1-\delta/\nu} \cdot \quad K^{\delta/\nu} \cdot \left(\frac{K}{N} \right)^{\lambda \log \frac{K}{N}}$$

siendo

$$\mu = -\frac{\rho\nu(1 - \delta)\delta}{2}$$

Kmenta replica a esta objeción,[11] diciendo que la crítica no puede ser que si una función f_1 es una buena aproximación de dos funciones f_2 y f_3 es dudosa su validez, sino que debiera ser si es, o no, una buena aproximación de f_2 (o de f_3). La auténtica objeción —reconoce Kmenta— que puede hacerse al método «es que la *función aproximación* modifica los tests estadísticos de significación. Esto, es cierto, es una parte del precio de usar una aproximación en lugar de la verdadera función».

El método utilizado por Feldstein,[12] al que puede calificarse como un método de «trials and errors» trata de estimar los parámetros de un modelo uniecuacional formado por una función de producción CES generalizada, tal como:

$$Y = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho} \right]^{-\nu/\rho}$$

11. J. Kmenta, «The approximation of CES Type Functions: a Reply», *International Economic Review,* vol. 8, núm. 2, 1967, p. 193.
12. M. Feldstein, «Alternative Methods of Estimating a CES Production Function for Britain», en *Economica,* núm. 136, nov. 1967, pp. 384-394.

para lo cual se hace una hipótesis sobre los probables valores de ρ y ν. Feldstein supone que es bastante realista aceptar las siguientes relaciones:

$$0 < \nu \leqslant 2$$

$$0 < \frac{1}{1+\rho} = \sigma \leqslant 3$$

Se toman pares de valores de ν y ρ, en los intervalos admitidos y se estima Y. A continuación se calcula el coeficiente de correlación lineal entre Y e $\hat{Y}$, para cada par de valores de ρ y ν, y aquel que sea más elevado nos permite decir cuál es el mejor estimador de ρ y ν. Después pueden estimarse los demás parámetros del modelo. Feldstein tomó en total 600 pares de valores, haciendo que ρ y ν variasen de décima en décima. Los valores de σ obtenidos son sustancialmente más altos que los que se obtienen por el método de ACMS.

Siguiendo un procedimiento similar al de Kmenta, M. Brown estimó directamente funciones CES.[13]

En el mismo artículo, Brown plantea el porblema de la estimación de la tasa marginal de sustitución por medio de la minimización de la función coste derivada de una función CES, en un mercado de competencia perfecta. Aquí nos referimos al procedimiento empleado para la estimación directa de la función CES que es tal como ésta.

$$Y = \gamma[\delta \overline{K}^{-\rho} + (1 - \delta) N^{-\rho}]^{-\nu/\rho}$$

donde todos los parámetros mantienen el significado que ya sabemos y $\overline{K}$ es el stock neto de capital ajustado por la capacidad de utilización.

Llamando F al corchete particularizado para $\delta = \delta_0$.

$$\mu_i = \frac{\nu_i}{\rho_i}, \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ l) \quad \text{y} \quad f_0 = F^{-r_0}$$

la expresión anterior puede desarrollarse por serie de Taylor para, $\delta = \delta_0$; $\nu = \nu_0$; $\mu = \mu_0$ y $\rho = \rho_0$, obteniéndose:

$$\langle Y \rangle = f_0 + \frac{\partial Y}{\partial \delta}(\delta - \delta_0) + \frac{\partial Y}{\partial \nu}(\nu - \nu_0) + \frac{\partial Y}{\partial \mu}(\mu - \mu_0) +$$
$$+ \frac{\partial Y}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) = f_0 + F^{-r_0}(Y - \gamma_0) -$$
$$- r_0 \gamma_0 F^{-r_0-1} [\overline{K}^{-\rho_0} - N^{-\rho_0}] \cdot (\delta - \delta_0) - r_0 \gamma_0 F^{-r_0-1}$$
$$\cdot [\delta_0 \overline{K}^{-r_0-1} \ln \overline{K} + (1 - \delta_0) N^{-\rho_0-1} \ln N] (\rho - \rho_0) +$$
$$+ (\gamma_0 F^{-r_0} \ln F)(r - r_0) + U$$

13. MURRAY BROWN, «A Mesure of the Change in Relative Explotation of Capital and Labor», en *Review of Economics and Statistics,* 1966, pp. 182-192. Aunque el trabajo de Kmenta se publicó en 1967, fue realizado en 1964.

siendo U los términos de grado superior a uno. Hiroki Tsurumi,[14] generalizó el método, en una estimación de las funciones de producción para la industria manufacturera del Canadá. Dicha generalización consiste en la aplicación del método de máxima «similitud» de Marquardt. El desarrollo es el siguiente:

Tengamos un modelo de regresión no lineal

$$Y_i = f(X_i;\ \theta), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

donde X_i representa el i-ésimo vector de los k elementos que originan y_i; θ es un vector que representa los m parámetros desconocidos de la ecuación; e_i es el conjunto de las n perturbaciones aleatorias.

La estimación de θ por mínimos cuadrados no lineales consiste en minimizar

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(X_i;\ \theta)]^2$$

La resolución aproximada de este problema puede ser emprendida por dos procedimientos; uno, linealizándola por medio de una serie de Taylor, y otro empleando el método de *steepst-descent* modificado. El trabajo de Tsurumi empieza aplicando este procedimiento, pero se desvía al método de la serie de Taylor.

Las varianzas y covarianzas de los estimadores mínimos cuadráticos de θ, S, están dados aproximadamente por:

$$\sigma^2 \left[\sum_{i=1}^{n} f_t(X_i;\ \theta)\, f_v(X_i;\ \theta)\right]^{-1}; \qquad t,\ v = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

$$\theta = S$$

$$y \cdot \sigma^2 \text{ puede ser estimado por } \frac{Q(S)}{n - m}$$

Aplicamos el método de los mínimos cuadrados no lineales para estimar una función de producción CES con cambio tecnológico neutral:

$$Y_i = A \cdot e^{\lambda t}[\delta K_i^{-\rho} + (1 - \delta)N_i^{-\rho}]^{-\nu/\rho} + e_i = f(K_i,\ N_i;\ \theta) + e_i$$

Desarrollando por serie Taylor, tenemos:

$$Y_i - f(K_i,\ N_i,\ \theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{A_0}(A - A_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \delta}\right)_{\delta_0}(\delta - \delta_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}(\rho - \rho_0) + \left(\frac{\partial t}{\partial \nu}\right)_{\nu_0}(\nu - \nu_0) + \mu_i$$

14. H. Tsurumi, «Nonlinear Two-Stage least Square Estimation of CES Production Functions Applied to the Canadian Manufacturing Industries, 1926-1939, 1946-1967» en *Review of Economics and Statistics,* vol. LII, mayo 1970, pp. 200-207.

en donde $\mu_i = e_i + R_i$, siendo R_i los términos de grado superior a uno de la serie de Taylor.

Por el principio de los mínimos cuadrados, tenemos que $D = \theta - \theta_0$, por lo que puede escribirse $\theta_1 = D + \theta_0$, y repitiendo el proceso hasta la k-ésima iteración,

$$\theta_K = \theta_{K-1} + D$$

el criterio de convergencia está dado por:

$$\left| \frac{\theta_K - \theta_{K-1}}{\theta_K} \right| \leqslant C$$

siendo C un número arbitrario prefijado. Es importante tomar como conjunto inicial de valores de θ uno que sea lo más aproximado posible a la realidad. Puede demostrarse que los estimadores así obtenidos son consistentes y asintóticamente eficaces.[15] Sin embargo, esto no es cierto cuando K_i y N_i no son variables exógenas.

Si hubiese autocorrelación del tipo: $e_i = \alpha e_{i-1} + \varepsilon_i$ con la hipótesis de homoscedasticidad para ε_i, la ecuación primitiva podría escribirse:

$$Y_i^* = f_i^* + \varepsilon_i$$

en donde

$$Y_i^* - f_i = f_1^*(A - A_0) + f_2^*(\lambda - \lambda_0) + f_3^*(\delta - \delta_0) + f_4^*(\rho - \rho_0) +$$
$$+ f_5^*(\nu - \nu_0) + f_6^*(\alpha - \alpha_0) + \varepsilon_i \quad ; \quad f_i^* = f_i - \alpha f_{i-1}$$

para $i = 1, 2, \ldots, S$, y $f_6^* = \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_0} \quad ; \quad \theta = [A, \lambda, \delta, \rho, \nu, \alpha]$.

Vamos a calcular las primeras derivadas parciales de f respecto a los parámetros del conjunto θ. Para lo que en la función

$$Y = A \cdot e^{\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) N^{-\rho}]^{\nu/\rho}$$

Si llamamos al corchete G, se sigue que:

$$Y = A \cdot e^{\lambda t} \cdot G^{-\nu/\rho}$$

15. H. O. Hartley, «The Modified Gauss-Newton Method for the Fitting of Non-Linear Regression Functions by best Square», *Technometrics*, mayo 1961.
H. O. Hartley, y A. Booker, «Non-Linear best Squares Estimation», *Annals of Mathematical Statistics*, núm. 36, 1965.

donde,

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_{\theta_0} = (e^{\lambda t} \cdot G^{-\nu/\rho})_{\theta_0} = e^{\lambda_0 t} \cdot G_0{}^{-\nu_0/\rho_0}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = (A \cdot t \cdot e^{\lambda t} \cdot G_0{}^{-\nu/\rho})_{\theta_0} = A_0 G_0{}^{-\nu_0/\rho_0} \cdot e^{\lambda_0 t} \cdot t$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta} = \left[-A e^{\lambda t} \frac{\nu}{\rho} G^{-\nu/\rho - 1} \quad (K^{-\rho} - N^{-\rho}) \right]_{\theta_0} =$$

$$= -A_0 \frac{\nu_0}{\rho_0} G_0{}^{-\frac{\nu_0}{\rho_0} - 1} \cdot (K^{-\rho_0} - N^{-\rho_0}) \cdot e^{\lambda_0 t}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \rho} = \{ -A e^{\lambda t} \nu G^{-\nu/\rho} \ln G \, [\delta K^{-\rho} \ln K + (1 - \delta) N^{-\rho} \ln N]^{\theta_0} \} =$$

$$= -A_0 \nu_0 G_0{}^{-\nu_0/\rho_0} \ln G_0 \, [\delta_0 K^{-\rho_0} \ln K + (1 - \delta_0) N^{-\rho_0} \ln N]^{\theta} e^{\lambda_0 t}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \nu} = \left(-A e^{\lambda t} \frac{1}{\rho_0} G^{-\nu/\rho} \ln G \right)_{\theta_0} = -A_0 \frac{1}{\rho_0} G_0{}^{-\nu_0/\rho_0} \ln G_0 e^{\lambda_0 t}$$

Sección II

El objeto principal de esta sección es especificar las variables de los modelos que nos proponemos utilizar, tratando de justificar dichas especificaciones. También consideramos en primer término, los problemas de la agregación y de dimensionalidad que llevan consigo los modelos agregados. La última parte está dedicada a exponer la forma de calcular las variables. Finalmente, se recogen en un cuadro los valores de las variables, según las diversas hipótesis de homogenización.

1. *El problema de la agregación*

El problema de la agregación se plantea tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Para el teórico, la cuestión reside en si las hipótesis microeconómicas pueden proyectarse a nivel macroeconómico con suficiente garantía de verosimilitud. Es decir, si por ejemplo, la hipótesis de que el empresario actúa de tal manera que se maximiza su beneficio, si es o no aceptable la hipótesis de competencia perfecta, etc.

Aceptando que existe una función de producción agregada, tal como vimos anteriormente, subsisten las dificultades prácticas de decidir qué nivel de agregación es el adecuado y cómo pueden homogenizarse los inputs.

Se plantee con una metodología u otra, el problema de la agregación de las variables es, en última instancia, un problema de números índices. Obviamente, a medida que el nivel de agregación es mayor, existen más posibilidades de que los índices sean más difícilmente construibles. Y ésta es una cuestión estrictamente econométrica. Como dice Frisch,[16] la elección de los *coeficientes de evaluación* es el resultado de una elección basada en juicios de valor. Lo importante es que dichos juicios de valor sean relevantes. Este autor puntualiza [17] que:

«El análisis técnico de la producción se funda exclusivamente sobre conceptos y criterios susceptibles de ser formulados en términos técnicos y de manera objetiva. *Los otros tipos de análisis de la producción presuponen, necesariamente, un sistema de evaluación* (por ejemplo, los precios de mercado), gracias al cual las diversas mercancías o los diversos servicios que figuran en el análisis se pueden reducir a un común denominador, que permite su comparación. Según la naturaleza de dicho sistema, se hablará de análisis económico en función de los precios, de análisis económico y social, de análisis semitécnico etc...»

Funciones de producción agregadas, basadas en coeficientes de evaluación técnicos o semitécnicos, han sido utilizadas en abundantes estudios empíricos. Chenery afirma,[18] que para la validez y eficacia de estas funciones ha de cumplirse: «que se refieran a procesos productivos, en los cuales los factores de producción utilizados expliquen la mayor parte de los costes de producción». En el trabajo citado, Chenery obtiene una función del transporte de gas por gasoducto. Siguiendo este camino, Kurz y Manne,[19] proponen una función de la forma CES.

$$Y = a[\delta K^{b_1} + (1 - \delta) N^{b_1}]^{1/b_2}$$

y la estima por un procedimiento iterativo, dando valores arbitrarios a b_1 y b_2, y repitiendo las estimaciones con los nuevos valores, de una manera similar a la empleada por Feldstein.

Una cuestión previa es si es necesario o no que la función utilizada mida

16. RAGNGR FRISCH, *Las Leyes Técnicas y Económicas de la Producción.* Ed. Sagitario, Barcelona, 1963, p. 9.
17. *Ibid.*, p. 10.
18. H. B. CHENERY, *art. cit.*
19. M. KURZ, y A. S. MANNE, «Engineering Estimates of Capital-Labor Substitution in Metal Machining», en *American Economic Review,* vol. 53, núm. 4, 1963, pp. 662 ss., especialmente pp. 675 y 676.

todas las variables en las mismas unidades. La respuesta es «no es necesario».

Pueden citarse numerosos ejemplos de funciones de producción agregadas en las cuales las dimensiones de las distintas variables no son idénticas. Así, Lombax,[20] utiliza el modelo uniecuacional para Gran Bretaña, del tipo de Cobb-Douglas en donde la Y está medida por un índice basado en las producciones físicas de carne, cebada, patatas, leche, lana, remolacha y trigo; la tierra, en acres; el trabajo por el número total de trabajadores y el capital por un índice que representa el volumen físico del capital construido a partir del número de tractores, la maquinaria agrícola, los caballos, almacenes, cobertizos, y establos, fertilizantes y piensos. Los datos son de serie histórica para el período 1924-1947.

G. Tintner,[21] que ajusta a funciones de Cobb-Douglas datos de sección mixta a nivel empresarial, utiliza las siguientes variables: producto total medido en dólares, tierra expresada en acres, edificios y construcciones, numerario y stocks de todo tipo en dinero, y trabajo en unidades de trabajo físicas (U. T. M., número de jornadas, etc.).

Zvi Griliches utiliza una ecuación Cobb-Douglas en la que todas las variables están expresadas en dinero, excepto «educación» que se mide por un índice basado en el número de años de escolaridad.[22]

Íntimamente relacionado con lo anterior está la cuestión del dimensionamiento de variables que intervienen en el modelo. Una ecuación debe ser homogénea en sus dimensiones. Sin embargo, como dice De Jong,[23] en una economía se utilizan frecuentemente relaciones no homogéneas en sus dimensiones. No puede decirse que sean propiamente ecuaciones y se las llama *relaciones empíricas*. Desde el punto de vista práctico, pueden utilizarse legítimamente, y los parámetros son números o constantes dimensionales.

De Jong [24] analiza el dimensionamiento de funciones CES en tres supuestos·

$$a) \qquad Y = \gamma[C_K K^{-\rho} + C_N N^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

en este supuesto

$$[C_K] = [R_N] \quad \text{y} \quad [C_N] = [R_K]$$

$$b) \qquad Y = \gamma\,[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)\,N^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

20. K. S. LOMAX, «An Agricultural Production Function for the United Kingdom», en *The Manchester School,* enero 1949, pp. 149-160.
21. GERHARD TINTNER, «A Note on the Derivation of Production Function from Farm Records», en *Econometrica,* 1944, pp. 26-34.
22. Zvi GRILICHES, «Specifications and Estimations of Agricultural Production Functions», en *Journal of Farm Economics,* vol. 45, núm. 2, mayo, 1963, pp. 419-428.
23. F. de JONG, *A Dimensional Analysis for Economists,* North-Holland, pp. 38-46.
24. *Ibid.,* p. 147.

en donde Y, K y N se miden en las mismas unidades (por ejemplo: dinero).

$$c) \qquad Y = \gamma \, [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) N^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

en donde Y, K y N se miden en diferentes unidades. Ésta no es una ecuación, sino una relación empírica.

Una forma de tipo c) será la que nosotros utilizaremos.

Los criterios de homogenización, que se traducen en coeficientes de evaluación, pueden ser idénticos para todas las variables del modelo, pero ésta no es una condición necesaria. Lo usual es que la producción se mida en dinero, el empleo en jornadas u horas-tipo y el capital en dinero. Por lo que queda patente en la disparidad en los coeficientes de evaluación. La multiplicidad de los sistemas de homogeneización implica que las dimensiones de los parámetros no sean siempre las mismas.

2. *Diversos modelos fundamentales en funciones CES*

Dos grupos de modelos esencialmente diferentes pueden emplearse para nuestro propósito. El primero se basa en utilizar modelos uniecuacionales con la función CES, más o menos modificada, pero conservando siempre la propiedad que le da nombre: la elasticidad de sustitución entre cada par de factores es constante. El otro grupo consiste en plantear modelos de dos o más ecuaciones simultáneas. Los trabajos empíricos que han utilizado este planteamiento constan, a lo máximo, de tres ecuaciones que reflejan la función de producción (tipo CES) y las condiciones neoclásicas de que el valor de la productividad marginal de los factores debe igualarse a los precios de dichos factores (usualmente sólo se utilizan K y N). De esta manera, se llega a un sistema de la siguiente forma general:

$$Y = \gamma \, [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) N^{-\rho}]^{-\nu/\rho}$$

$$\log \frac{Y}{N} = a + \sigma \log \omega + \frac{(1 - \sigma)(\nu - 1)}{\nu} \log Y$$

$$\log \frac{Y}{K} = b + \sigma \log \mu + \frac{(1 - \sigma)(\nu - 1)}{\nu} \log Y$$

siendo a y b parámetros a estimar que no tienen para nosotros utilidad inmediata, ω y r, el tipo de salarios (precio del trabajo) y el tipo de interés (precio del capital), respectivamente. El empleo de un modelo como éste (también pueden utilizarse modelos biecuacionales) comporta una cierta hipótesis sobre el mercado: existe competencia perfecta.

La función CES es susceptible de modificarse añadiendo una nueva variable,

t, semiespecificada, que por medio de una función exponencial de la forma $e^{\lambda t}$, trata de medir el impacto del progreso tecnológico en el crecimiento del output.[25]

En definitiva, nosotros utilizaremos los dos tipos de modelos formales siguientes:

i) Uniecuacional

$$Y = Ae^{\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) N^{-\rho}]^{-\nu/\rho}$$

ii) Biecuacional

$$Y = Ae^{\lambda t} [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) N^{-\rho}]^{-\nu/\rho}$$

$$\ln \frac{Y}{N} = a + \sigma \ln \omega + \frac{(1 - \sigma)(\nu - 1)}{\nu} \log Y$$

Nos toca ahora seleccionar las variables del modelo, definirlas y especificar la forma en que se calcularán.

En principio puede pensarse, acertadamente, que cuantas más variables exógenas utilice el modelo, más exactamente representará la realidad. Sin embargo, ya hemos visto qué dificultades estadísticas de estimación nos impiden utilizar más de tres variables exógenas. Primero, porque como sólo disponemos de quince observaciones, la disminución del número de grados de libertad que nos quedan cuando se introduce una más hace inadmisible la estimación. Segundo, porque si se incluye una tercera variable exógena en el corchete las dificultades de cálculo crecen exponencialmente, y hacen mucho más difícil la estimación.

El modelo uniecuacional que proponemos utilizará las siguientes variables:

— La producción total ganadera.
— El capital ganadero.
— Los piensos consumidos por la ganadería.
— El tiempo, como variable semiespecificada (0, 1, 2, ..., n).

Obviamente, existen al menos otras tres variables que tienen importancia en la formación de la producción ganadera. Son el trabajo humano, la tierra y el resto del capital de explotación (como pueden ser las instalaciones).

Lo ideal hubiese sido estimar sucesivamente modelos a los que se les fuese añadiendo variables nuevas o sustituyendo unas por otras. Sin embargo, la dificultad de estimar empíricamente el trabajo humano absorbido por la ganadería, y lo difícil que resultaría calcular el capital de explotación nos han impedido que hayamos podido seguir este camino ideal. En cuanto a la

25. Véase R. SOLOW, «Technical Change and the Aggregate Productions Function», en *Review of Economic Estudies,* 1957, pp. 312 ss.

tierra, cabe sospechar razonablemente que está correlacionada con la cantidad de piensos producidos y consumidos.

Tal y como se pretende construir el modelo tiene un fuerte significado técnico. El capital ganadero —el ganado— se concibe como una complicada maquinaria de transformar piensos —a fin de cuentas proteínas, lípidos e hidratos de carbono— en diversas producciones —también a fin de cuentas, proteínas, lípidos e hidratos de carbono—. Ahora bien, los nuevos productos tienen utilidad directa para el hombre, cosa que no sucede con los primeros. Esto justifica que se realice la transformación técnica, aun cuando ésta se lleva a cabo con rendimiento netamente inferior al 100 por ciento. Enfocado así el problema, queda más claro que son estos dos factores productivos los determinantes principales de la producción.

Por otra parte, las variaciones del trabajo humano, en su aspecto cuantitativo, no parece que deba afectar a la producción, ya que se encuentra en situación de excedente en la mayor parte de las explotaciones. Los aspectos cualitativos del trabajo se hallan incorporados en el factor $e^{\lambda t}$ que, como dijimos, mide el progreso tecnológico en sentido amplio; es decir, no sólo las mejoras de razas ganaderas y de la calidad de los piensos, sino también la disminución de enfermedades, la calidad del trabajo, el tipo de instalaciones, etcétera...).

El modelo biecuacional, utiliza, además de las cuatro variables ya mencionadas, una quinta (ω) que representa el precio del input PIENSOS; es decir, es un índice que mide el precio medio ponderado de todos los piensos consumidos.

3. *Definición y forma de calcular las variables*

Examinaremos sucesivamente la producción total (Y), los piensos (N), el capital ganadero (K), y el índice de precios de los piensos (ω).

La variable endógena del modelo —la producción— es una medida de los siguientes grupos de productos:

— carne	— trabajo
— leche	— huevos
— lana	— estiércol

Se trata de la producción total, y no se descuenta, por consiguiente, ni el reempleo ni el autoconsumo.

Si se utilizan como coeficientes de evaluación para homogenizar los precios de mercado, dicha variable tiene como dimensiones pesetas/tiempo.

La serie se deflacta con el índice general de precios del INE, tomando como año base 1953. Los datos para construir esta serie se obtienen de la publicación *El producto neto de la Agricultura Española,* elaborado por la Secretaría General Técnica del Ministerio de Agricultura, desde la campaña 1950-

1951.[26] Como la citada publicación advierte, los datos se refieren a la campaña agrícola, pero pueden ser utilizados para el primero de los años mencionados.

También hemos evaluado la producción desde un punto de vista semitécnico, midiendo la energía y las proteínas, y construyendo un índice conjunto que se basa en ponderar la energía con un coeficiente de calidad proteínica.

La energía se expresa en kcal y el coeficiente de calidad proteínica no tiene dimensiones, pues consiste en expresar en tanto por uno la relación proteínas/energía, respecto a la media del período.[27] El trabajo se incluye por su valor energético y se ha calculado de la manera que se expone en el anexo I; el estiércol no se considera.

Para el cálculo de la serie del input «piensos» se ha tenido en cuenta lo que la mencionada publicación del Ministerio de Agricultura ha denominado «gastos de la ganadería», concretamente el apartado «piensos y camas». Para eliminar el valor de las «camas» se resta del total el epígrafe «brazas y plantas para camas»; sin embargo, del epígrafe «pajas» no se ha podido restar el valor imputado de los dedicados a «camas», por lo que se comete un error, que no parece de grave trascendencia.

Por un procedimiento similar al utilizado para el output se ha evaluado el input «piensos» con un criterio técnico, de la manera que se expone detalladamente en el anexo II. La idea es ponderar el valor energético de los piensos con un coeficiente de calidad proteínico, y obtener, así, una serie de la variable «piensos» que se utilizará en el modelo con homogenización semitécnica.

La homogenización de los datos de capital suele plantear los problemas más difíciles en los trabajos en que se manejan funciones de producción. Esto es debido, por una parte, a que los diversos componentes del capital tienen características muy variadas, y por otra, a que la homogenización en dinero, que resulta sencilla en el trabajo (o, en los piensos para nuestro caso) no lo es en el capital, pues en ocasiones hay que valorar activos con los que no se opera en el mercado. Este problema de la valoración debe resolverse, casi siempre, con criterios subjetivos. Paradójicamente, este problema no se plantea para la ganadería o, al menos, se plantea con otros matices que hacen que pueda resolverse con menos dificultades. Primero, aquí se trata de utilizar un capital *bastante* homogéneo: ganado. Segundo, aun cuando la obtención del valor en dinero no puede hacerse en el caso español por ausencia de estadísticas suficientemente largas, es claro que desde un punto de vista teórico el problema tiene unas soluciones mucho menos arbitrarias que en el caso general.

Los coeficientes de evaluación que nos proponemos utilizar son de los denominados técnicos. Dichos coeficientes admiten implícitamente que, de acuer-

26. Ministerio de Agricultura (SGT), *El producto neto de la Agricultura Española,* campañas 1950-1951 a 1953-1954, Madrid, 1960, y campañas desde 1954-1955 a 1970-1971, Madrid, años 1955 a 1971.

27. Véase anexo I.

do con algún criterio, todo el ganado es igual. Generalmente, se ha utilizado el peso vivo de la cabeza por hacer la reducción; pero este criterio es bastante burdo; y por tanto, poco práctico. Esta forma de razonar se utiliza con profusión; así, el *Production Year Book* de la F.A.O. emplea las siguientes equivalencias:

1	cabeza	caballar o mular	= 1,0 UG
1	»	vacuno	= 0,8 UG
1	»	caprino u ovino	= 0,1 UG
1	»	porcino	= 0,2 UG

Los coeficientes que aquí se usan se han obtenido de la siguiente manera: se asigna un peso medio a cada tipo de ganado, ajustándose a las clasificaciones de los censos en lo posible; se calculan las necesidades alimenticias de mantenimiento (en UF) y se reducen a unidades ganaderas (UG) dividiendo por las UF que para mantenimiento necesita una vaca lechera de 500 kg p. v. Los coeficientes obtenidos coinciden prácticamente con los que utiliza para reducciones de este tipo el Ministerio de Agricultura, pero desconocemos por qué procedimientos los ha establecido dicho organismo.

Los datos utilizados son los de los censos de la ganadería española.[28] Las fechas censales no coinciden para todos los años y aquéllos no son homogéneos en su contenido.

Año y mes del Censo	Especies censadas	**Observaciones**
1950 (30 abril)	B.O.C.P.E.A.	no incluye animales menores de 1 año.
1955 (31 mayo)	B.O.C.P.E.A.	no incluye las crías.
1960 (30 noviembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye las crías de ovino y gallinas.
1962 (30 noviembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye las crías de ovino y gallinas.
1963 (30 noviembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye las crías de ovino y gallinas.
1964 (30 noviembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye las crías de ovino y gallinas.
1965 (30 marzo)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1965 (30 septiembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1966 (30 marzo)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1966 (30 septiembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1967 (30 marzo)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1967 (30 septiembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1968 (30 marzo)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1968 (30 septiembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1969 (30 marzo)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1969 (30 septiembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1970 (30 marzo)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.
1970 (30 septiembre)	B.O.C.P.E.A.	no incluye cría de gallinas.

B, bovino; O, ovino; C, caprino; P, porcino; E, equino (caballos, mulas y asnos); A, aves.

28. Ministerio de Agricultura, *Censos de la Ganadería Española,* años 1950, 1955, 1960, 1962 a 1970.

De esta manera se dispone de una serie de 12 puntos, correspondientes a 12 años. Para los años 1950 y 1955 se hace preciso utilizar el censo fechado el 30 de abril y 31 de mayo, respectivamente. De los años 1960 a 1964 la fecha es 30 de noviembre de cada año y de 1965 a 1970 se utiliza el 30 de septiembre. Esta manera de proceder, que no es correcta, viene propuesta por los datos disponibles. Asimismo, es necesario estimar el valor de las crías de todas las especies para los censos de 1960, 1955 y para el ganado ovino en 1960, 1962, 1963 y 1964. Esto se ha realizado de la manera que se detalla en el anexo III.

Con objeto de alargar la serie se han hecho estimaciones de los censos para los años 1951, 1956 y 1961. El detalle se expone en el anexo IV.

SECCIÓN III

El objetivo principal de la sección es exponer los resultados obtenidos en la estimación de los diversos modelos, que han sido los siguientes:

	Hipótesis de agregación (homogenización)	
Hipótesis de mercado	Criterio económico	Criterio semitécnico
Competencia perfecta	Modelo biecuacional con Y y N en dinero y K en UG	Modelo biecuacional con Y en kcal.* N en UF * y K en UG
Sin ninguna hipótesis sobre el mercado	Modelo uniecuacional con Y y N en dinero y K en UG	Modelo uniecuacional con Y en kcal.* N en UF * y K en UG

* Modificadas para tener en cuenta la calidad proteínica.

Cada modelo uniecuacional ha sido estimado por tres procedimientos a los que hemos denominado Kmenta (I), Kmenta (II) y Feldstein.

1. *Modelos uniecuacionales*

De todos los métodos hasta ahora conocidos para estimación de modelos uniecuacionales de funciones de producción CES, se han ensayado tres:

1) Método Feldstein: [29]

29. M. FELDSTEIN, «Alternative Methods of Estimating CES Production Funtion for Britain», *Economica,* núm. 136, nov. 1967, pp. 348-395.

Partimos de la expresión de función de producción

$$Y = Ae^{\lambda t}[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)N^{-\rho}]^{\nu/\rho}$$

Para los años que no estaban censados las crías de ovino se han estimado por un procedimiento que se explica en el anexo V. Las crías de gallinas no se estiman para ningún año.

Finalmente, el precio de los piensos se obtiene dividiendo el valor anual de los mismos, en pesetas-constantes de 1953, para la cantidad de UF que aportan en cada año. Por tanto, el precio viene dado en pesetas-constantes/UF. El índice de precios utilizado para deflactar es el del I.N.E., ya mencionado.

En resumen, las variables utilizadas en el modelo son las del orden del cuadro 1, en donde se detallan tanto las de los modelos que emplean al criterio de homogenización, como el que se da, sirve de un criterio semitécnico para conseguir tal homogeneidad.

CUADRO 1

Variables de las funciones de producción especificadas
(Tipo CES)

Años	Producción (en millones de ptas.-constantes)	Producción correg. (en millones de kcal)	Piensos (en millones de ptas.-constantes)	Piensos corregidos (en millones de unidades UF)	Capital (en miles de unidades UG)	Tiempo	Precios de los piensos (ptas.-const./UF)
1950	21.967,6	143,6	22.136,0	379,8	6.874,8	1	4,12
1951	21.155,9	146,3	22.528,0	421,0	8.173,6	2	3,44
1952	25.686,4	179,3	22.575,7	427,2	—	3	3,44
1953	24.891,8	181,4	24.172,8	387,2	—	4	3,36
1954	38.447,4	192,8	23.468,2	453,6	—	5	3,34
1955	39.996,0	191,0	23.172,2	389,4	7.700,8	6	3,17
1956	42.348,6	189,9	30.123,8	492,7	7.911,1	7	4,08
1957	46.310,1	203,3	30.370,3	496,2	—	8	2,73
1958	53.009,4	216,7	30.578,6	605,6	—	9	2,31
1959	51.467,5	225,5	31.647,4	596,4	—	10	2,36
1960	52.845,7	233,7	31.417,7	561,4	8.987,5	11	3,15
1961	61.243,3	262,8	34.521,6	611,7	9.091,5	12	2,80
1962	63.311,3	285,8	37.245,1	680,3	8.766,0	13	2,83
1963	71.748,3	330,4	36.911,4	671,9	8.483,0	14	3,00
1964	68.559,9	346,9	41.362,0	595,6	8.246,0	15	3,80
1965	71.057,2	328,9	41.315,5	592,6	7.190,0	16	2,06
1966	80.961,2	398,8	47.833,3	880,0	8.259,0	17	2,12
1967	79.625,9	447,6	47.414,9	781,2	7.400,1	18	2,70
1968	82.879,8	441,4	51.187,5	708,1	7.203,0	19	2,26
1969	86.664,2	476,1	54.176,0	568,3	7.397,0	20	2,96
1970	88.703,7	519,7	54.836,9	805,2	7.318,0	21	2,48

FUENTE: Elaborado a partir de las fuentes citadas en el texto.

Tomando logaritmos neperianos

$$\ln Y = \ln A + \lambda t - \frac{\nu}{\rho} \ln [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) N^{-\rho}]$$

Esta ecuación no puede estimarse por mínimos cuadrados ordinarios. Ahora bien, si conociéramos dos de los parámetros que tratamos de estimar —pueden ser ρ y δ— la expresión contenida en el corchete sólo dependería de K y N, y la ecuación contendría tres parámetros a estimar (A, λ y ν). Será preciso, por tanto, ir dando pares de valores alternativos a ρ y δ y hacer las estimaciones consiguientes. Al final, de todos ellos se seleccionan los que proporcionan mejores estimadores, tengan tests de autocorrelación aceptable y un coeficiente de determinación más elevado. Siguiendo el trabajo mencionado de Feldstein, admitimos como campo de variabilidad de ρ un intervalo entre $-1{,}0$ y $+3{,}0$ que corresponde a unos valores de la elasticidad de sustitución de $+\infty$ y $+0{,}25$, que son extremos razonablemente aceptables para el posible valor de σ (teóricamente el intervalo de oscilación $+\infty$ y 0). En cuanto a los valores de δ, tomamos el intervalo en que teóricamente puede variar, 0,0 a 1,0.

Si la norma de variación es de décima en décima tenemos 400 casos posibles, que han sido los ensayados. Para ello, se ha dispuesto de un ordenador IBM-360/45, el paso de un caso a otro se realizaba automáticamente de acuerdo con una instrucción oportunamente añadida al programa de cálculo.

2) Método de Kmenta (I)[30]

Partiendo de la ecuación general de la función CES puede llegarse a una aproximación de la misma por un desarrollo en serie de Taylor, una vez que se han tomado logaritmos para el caso $\rho = 0$. Por tanto, la ecuación que ahora debe estimarse es:

$$\langle Y \rangle = Y_{\theta_0} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \rho} \right)_{\theta_0} \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \rho^2} \right)_{\theta_0} \rho^2 + U_i$$

y de aquí, se sigue que:

$$\langle \ln Y \rangle = \ln A + \lambda t + \nu\delta \ln K + \nu(1 - \delta) \ln N -$$

$$- \frac{1}{2} \nu(1 - \delta)\delta\rho[\ln K - \ln N]^2 + U_i$$

30. M. Feldstein, *op. cit.*, p. 392. Creemos que comete un error de transcripción cuando dice que $\log Y = \log A + (1 - \delta) \log K + \delta \log N + \frac{1}{2} \cdot \nu\delta(1 - \delta) \frac{\sigma - 1}{\sigma} (\log K - \log N)^2$, ya que, en este caso, la estimación quedaría indeterminada, puesto que sólo se llega a conocer δ, $1 - \delta$ y un estimador de $\nu \frac{\sigma - 1}{\sigma}$.

Siendo U_i una variable que incluye los términos de orden superior a dos y la variable aleatoria del modelo.

3) Método de Kmenta (II)

Como decíamos anteriormente, éste parece el método más adecuado. Se basa en «linealizar» la función por un desarrollo en serie de Taylor para los cinco parámetros y valores arbitrarios de los mismos. Después, por una serie de aproximaciones sucesivas, se puede llegar a los estimadores más eficaces. En síntesis, se trata de estimar una aproximación de Y, de la forma:

$$\langle Y \rangle = Y_{\theta_0} + \left(\frac{\partial Y}{\partial A} \right)_{\theta_0} (A - A_0) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)_{\theta_0} (\lambda - \lambda_0) +$$

$$+ \left(\frac{\partial Y}{\partial \rho} \right)_{\theta_0} (\rho - \rho_0) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta} \right)_{\theta_0} (\delta - \delta_0) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \nu} \right)_{\theta_0} (\nu - \nu_0) + U_i$$

siendo $\theta_0 = \theta[A_0, \lambda_0, \rho_0, \delta_0, \nu_0]$ un conjunto arbitrario de valores de los parámetros. U_i es una variable que incluye los términos de grado superior a uno y a la variable aleatoria del modelo.

Una vez realizada la estimación de $\hat{\theta} = \theta(\hat{A}, \hat{\lambda}, \hat{\rho}, \hat{\nu}, \hat{\delta})$ se somete el vector a las siguientes *normas de convergencia*

$$\left| \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\theta_0} \right| \leqslant 0,1$$

Si las cumple hemos llegado a la estimación que queríamos, puesto que el error relativo es menor o igual a una centésima. Si no las cumple —y esto será lo usual en el primer intento— se entra en la nueva ecuación con el conjunto de valores estimados, es decir, se sustituye θ_0 por $\hat{\theta}$, y se procede a una nueva estimación. Como dijimos anteriormente, se puede demostrar que las estimaciones así realizadas son convergentes, por lo que con un adecuado número de reiteraciones deberá llegarse a unas estimaciones de los parámetros que no difieran de los anteriores en más de una centésima.

Hemos aplicado los tres métodos a las dos series de variables, es decir, cuando se homogeniza con lo que denominábamos los criterios económicos y semitécnicos, respectivamente. Para simplificación, de ahora en adelante denominaremos a cada conjunto de variables, casos I y II. Los resultados del ajuste estadístico han sido los siguientes:

Método 1.º:

a) Caso I (criterio económico)

Se obtienen doce estimaciones «buenas», es decir, con coeficientes de determinación (R^2) altos, «t» de Student significativos para todos los estimadores de los parámetros y estadísticos Durbin-Watson (DW) significativos. Los estimadores de los parámetros de estos doce ajustes constan en los siguientes intervalos:

i) $1{,}60 \leqslant \hat{\rho} \leqslant 2{,}10$, lo cual implica elasticidades de sustitución entre 0,322 y 0,385

ii) $0{,}1 \leqslant \hat{\delta} \leqslant 0{,}4 \quad 0{,}6 \leqslant 1 \ \delta \leqslant 0{,}9$

iii) $0{,}0577 \leqslant \hat{\lambda} \leqslant 0{,}698$

iv) $0{,}7934 \leqslant \hat{\nu} \leqslant 0{,}9604$

v) $1{,}970 \leqslant \hat{A} \leqslant 13{,}75$

De entre todos ellos, la que alcanza un R^2 de mayor valor absoluto es la correspondiente a los estimadores: $\hat{A} = 4{,}897$, $\hat{\lambda} = 0{,}0640$; $\hat{\delta} = 0{,}20$; $\hat{\nu} = 0{,}886$ y $\hat{\rho} = 2{,}00$ ($\hat{\sigma} = 0{,}33$)

Por tanto, la estimación finalmente aceptada es ésta:

$$Y = 4{,}9\, e^{0{,}065\, t} (0{,}2\, K^{-2{,}0} + 0{,}8\, N^{-2{,}0})^{-\frac{0{,}886}{2{,}0}}$$

$$(\pm\ 0{,}0048) \qquad\qquad (\pm\ 0{,}336)$$

$R^2 \ = 0{,}96225$
$df \ = 13 \qquad (13{,}603) \qquad (2{,}638)$
$n \ = 15$
DW $= 2{,}343$
SB (error de estimación de la función) $= 0{,}0947$.

Los coeficientes de correlación parcial de los parámetros λ y ν, son, respectivamente, 0,8556 y 0,10565. El modelo ajustado no cumple exactamente la condición de homoscedasticidad, por lo que no puede decirse que los parámetros estimados sean los más eficaces posibles.

b) Caso II (criterio semitécnico)

Así, cuando se obtienen altos coeficientes de determinación y el estadístico DW indica que las mutaciones residuales son independientes unas de otras (no existe autocorrelación de las perturbaciones), no se consigue en ningún caso estimaciones insesgadas del parámetro ν, porque la «t» de Student de dicho parámetro resulta no significativa. Como, además, existe heteroscedasticidad, hemos de concluir que no se ha hallado ninguna estimación que proporcione estimadores insesgados y eficientes, para este caso.

Método 2.º:

a) Caso I (criterio económico)

Con este método no se obtienen directamente los estimadores de los parámetros, excepto para A y λ. Si recordamos la ecuación ajustada, veremos que se estiman los productos de parámetros.

$$\hat{\nu}\hat{\delta};\quad \hat{\nu}(1-\hat{\delta});\quad \hat{\rho}\hat{\nu}(1-\hat{\delta})$$

Si estos estimadores son buenos podemos obtener los de los parámetros individualizados despejándolos en el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que forman aquéllos.

Después, por el teorema de Gauss-Markov, se calculan el estadístico «*t*» de cada parámetro estimado.

La estimación de la ecuación aproximada resulta ser la siguiente:

$$\ln Y = 12{,}7838 + 0{,}1034\, t - 2{,}0341 \ln K +$$

$$+ 1{,}620 \ln N - \frac{1}{2}\, 1{,}4918\, (\ln K - \ln N)^2$$

(± 0,0173)	(± 0,8869)	(± 0,7785)	(± 0,4770)
(5,97)	(— 2,29)	(2,07)	(3,12)

$R^2 = 0{,}9821$
$df = 11$
$n = 15$
$\mathrm{DW} = 2{,}15$
SB^2 (error de estimación típico de la función) $= 0{,}0054$.

El test de homoscedasticidad es negativo (puede sospecharse razonablemente que existe heteroscedasticidad). El «test» *t* de Student, da como estimados insesgados $\hat{\lambda}$ y $\hat{\rho}\hat{\nu}\hat{\delta}\,(1-\hat{\delta})$, para el nivel de la probabilidad del 95 por ciento. El hecho de que sólo sea insesgado uno de los tres productos de parámetros hace que no podamos descubrirlos individualmente. Por otra parte, aun cuando esto fuese posible para dar como insesgados a cada uno de ellos, sería preciso calcular las «*t*» de Student correspondientes, para hacer el correspondiente «test», y podría suceder que los individualizados no fuesen insesgados.

b) Caso II (criterio semitécnico)

El resultado del ajuste es éste:

$$\ln Y = 8{,}7766 + 0{,}0636\, t — 2{,}1331 \ln K +$$

$$+ 1{,}9929 \ln K + \frac{1}{2}\, 0{,}7395\, (\ln K — \ln N)^2$$

(± 0,0055)	(± 1,3472)	(± 1,3024)	(± 0,5396)
(11,55)	(— 1,63)	(1,47)	(1,37)

$R^2 = 0{,}9889$
$df = 11$
$n = 15$
DW $= 1{,}94$
SB^2 (error de estimación de la función) $= 0{,}00276$.

Las «t» de Student resultan no significativas al nivel del 90 por ciento de probabilidad, para todos los estimadores excepto para t, que lo es hasta en el nivel del 99 por ciento.

La estimación realizada es inservible. Por otra parte, según se deduce del DW, existe autocorrelación de las oscilaciones residuales.

Método 3.º:

Casos *a*) y *b*)

Teóricamente, con este método se obtienen los estimadores más eficaces de los parámetros. El programa de cálculo utilizado no llega a ningún resultado, porque en los diversos pasos que se realizan en el ordenador se produce sistemáticamente un «error», como consecuencia de que se obliga al cálculo de logaritmos de números negativos. En ambos casos, el programa realiza la primera estimación y, como después de verificar que no se cumple la norma de convergencia es necesario reestimar la ecuación, utilizando como conjunto de parámetros los obtenidos en la estimación anterior, sucede una de estas cosas:

i) $\hat{\rho}_1 < —1$

ii) $\hat{\delta}_1$, no está comprendido entre 0 y 1

iii) $\hat{\nu}_1 < 0$

Esto hace imposible que el programa siga funcionando. Pero téngase en cuenta que no puede deducirse de aquí que no haya una *solución buena,* pues podría suceder que los nuevos estimadores —caso de poderse obtener— tuviesen un sentido económico adecuado.

El programa se ha utilizado con el siguiente criterio de convergencia:

$$\left| \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0} \right| \leqslant 0{,}1$$

es decir, un error relativo del 10 por ciento.

2. *Modelos biecuacionales*

La estimación de modelos biecuacionales consta de dos etapas. En primer lugar, se estima la ecuación $\ln Y/N = a + \sigma \ln \omega$, con lo cual se obtiene el estimador de la elasticidad de sustitución ($\hat{\sigma}$), que permite calcular el estimador de $\hat{\rho}$. Esto facilita enormemente la estimación de la función de producción propiamente dicha. Ya que pueden aplicarse los modelos descritos (Feldstein, Kmenta (I) y Kmenta (II)), notablemente simplificados, y con un grado más de libertad.

Las estimaciones realizadas para los modelos de la ganadería española han resultado ser las siguientes:

a) Caso I (criterio económico)

$$\ln \frac{Y}{N} = 1{,}0093 - \underset{\substack{(\pm\, 0{,}1951)\\(-\, 2{,}83)}}{0{,}5538} \ln \omega + \underset{\substack{(\pm\, 1{,}6121)\\(+\, 2{,}38)}}{2{,}1613} \log Y$$

$R^2 = 0{,}300$
$df = 19$
$n = 21$
DW $= 0{,}89$
SB^2 (error de estimación de la función) $= 0{,}0318$

b) Caso II (criterio semitécnico)

$$\ln \frac{Y}{N} = -\, 3{,}4758 - \underset{\substack{(\pm\, 0{,}3353)\\(-\, 1{,}71)}}{0{,}3848} \ln \omega + \underset{\substack{(\pm\, 3{,}9416)\\(+\, 1{,}68)}}{4{,}5613} \log Y$$

$R^2 = 0{,}13$
$df = 19$
$n = 21$
DW $= 0{,}62$

Es evidente que ambas estimaciones son inservibles, como consecuencia de tener un R^2 (coeficiente de determinación) muy bajo y existir multicolinealidad entre las variables. Desde un punto de vista económico esto significa que no existen razones para afirmar que el mercado sea de competencia perfecta.

Sección IV

Aceptando como única estimación fiable la que proporciona el método de Feldstein aplicado al caso I, tenemos los siguientes valores de los parámetros:

$$\hat{A} = 4{,}897$$
$$\hat{\lambda} = 0{,}0650$$
$$\hat{\delta} = 0{,}20$$
$$\hat{\nu} = 0{,}886$$
$$\hat{\sigma} = 0{,}33$$

Vamos a analizar el significado económico que se desprende de los anteriores valores. Recordemos que A, que se denomina «coeficiente de eficacia», mide en cuánto queda multiplicada la producción cuando se utilizan las cantidades de los inputs K y N. Ahora bien, como A es un coeficiente dimensionado, únicamente pueden hacerse deducciones útiles, si es homogéneo con las dimensiones de las variables, lo cual no ocurre aquí. Por ello, no nos detendremos más en este coeficiente.

Por la forma en que ha sido introducido, $e^{\lambda t}$, mide el progreso tecnológico en la manera que lo definió Solow.[31] Como no afecta a las variables K y N, se trata de progreso tecnológico neutral. Quizá sería más adecuado denominar a $e^{\lambda t}$, factor residual, ya que se incluyen en él el progreso técnico propiamente dicho y otros factores difícilmente medibles, como son la calidad del trabajo, la organización de las explotaciones, el estado sanitario de la cabaña, etc.

Para el coeficiente $\hat{\lambda} = 0{,}0650$ se obtiene la serie que se adjunta en el cuadro de «Estimación del progreso tecnológico en la ganadería».

Los coeficientes de reparto, δ, $1 - \delta$, miden qué partes del output son imputables al capital ganadero y a los piensos, respectivamente. Como los valores estimados son 0,2 y 0,8, podemos decir que los piensos son causa más importante, en términos relativos, que el capital ganadero. O, dicho de otra manera, en el crecimiento observado de la producción ganadera, ha sido más importante el incremento de los piensos que el aumento de la cabaña ganadera; porque *ceteris paribus,* la unidad de piensos produce 0,8 unidades de output,

31. R. Solow, *op. cit.*

CUADRO 2

Estimación del progreso tecnológico en la ganadería

(En el sentido Solow)

t	λ_t	$e^{\lambda t}$	Índice
1	0,0650	1,06	100,0
2	0,1300	1,14	107,5
3	0,1950	1,21	114,2
4	0,2600	1,29	121,7
5	0,3250	1,38	130,2
6	0,3900	1,47	138,7
7	0,4550	1,57	148,1
8	0,5200	1,68	158,5
9	0,5850	1,80	169,8
10	0,6500	1,93	182,1
11	0,7150	2,05	193,4
12	0,7800	2,18	205,7
13	0,8450	2,33	219,8
14	0,9100	2,49	234,9
15	0,9750	2,65	250,0
16	1,0400	2,83	267,0
17	1,1050	3,02	284,9
18	1,1700	3,22	303,8
19	1,2350	3,43	323,6
20	1,3000	3,67	346,2
21	1,6500	5,20	490,6

FUENTE: Elaboración propia.

en tanto que la de capital ganadero sólo produce 0,2. Si nos fuese lícito hacer proyecciones a partir del modelo deberíamos decir que es preferible lograr el crecimiento por una mejora de la alimentación animal que por un incremento de cabaña. Ahora bien, ¿hasta qué punto podemos hacer esto? La respuesta nos la proporciona la elasticidad de sustitución entre capital ganadero y piensos. Como valor de dicha elasticidad hemos obtenido 0,33, lo cual indica que resulta bastante difícil sustituir un factor por otro, pero que es posible hacerlo entre ciertos límites. A esto volveremos a referirnos más adelante.

Finalmente, el coeficiente ν, o de rendimientos a escala, resulta ser lo suficientemente próximo a la unidad (0,886), como para concluir que existen rendimientos constantes a escala, que como sabemos, quiere decir que cuando los inputs empleados se multiplican por un número arbitrario, *m*, la producción queda multiplicada por ese mismo número. En términos matemáticos esto significa que la ecuación es homogénea de grado uno.

SECCIÓN V

Consideraremos la aplicación del modelo para conocer las productividades media y marginal de los factores K y N, la relación marginal de sustitución entre estos mismos factores, y la estimación del factor K en los años 1952, 1953, 1954, 1957, 1958 y 1959, para los que no se dispone ni de datos ni de estimaciones por medio de coeficientes de fertilidad-viabilidad.

Dicha estimación se basa en despejar de la función estimada la variable K y calcular su valor para los conjuntos de variables correspondientes a los años citados. El resultado es el siguiente:

Año	Y	N	t	K
1952	25.686,40	22.575,70	3	6.981,19
1953	24.891,80	24.172,80	4	5.933,55
1954	38.447,40	23.468,20	5	11.161,11
1957	46.310,10	30.370,30	8	9.430,56
1958	53.009,40	30.578,60	9	10.531,47
1959	51.464,50	31.647,40	10	8.959,65

Según calculamos en un epígrafe anterior, las productividades medias y marginales de los factores productivos en una función de producción tipo CES como la que utilizamos, valen, respectivamente:

$$PM_K = \frac{Y}{K} Ae^{\lambda t}\left[\delta + (1-\delta)\left(\frac{N}{K}\right)^{-\rho}\right]^{-\nu/\rho} K^{\nu-1}$$

$$PM_N = \frac{Y}{N} = Ae^{\lambda t}\left[\delta\left(\frac{K}{N}\right)^{-\rho} + 1 - \delta\right]^{-\nu/\rho} N^{\nu-1}$$

$$P'_K = \frac{Y}{K} = Ae^{\lambda t}\nu\delta K^{\nu-1}\left[\delta + (1-\delta)\left(\frac{K}{N}\right)^{\rho}\right]^{-\frac{\nu+\rho}{\rho}}$$

$$P'_N = \frac{Y}{N} = Ae^{\lambda t}\nu(1-\delta)\, N^{\nu-1}\left[\delta\left(\frac{N}{K}\right)^{\rho} + 1 - \delta\right]^{-\frac{\nu+\rho}{\rho}}$$

Como las propiedades de las productividades son análogas para ambos factores, sólo analizaremos la correspondiente al factor «capital ganadero».

De acuerdo con las estimaciones paramétricas efectuadas, las productividades media y marginal de K resultan ser las siguientes:

$$PM_K = 4{,}897\; e^{0{,}065\,t}\left[0{,}2 + 0{,}8\left(\frac{K}{N}\right)^{2}\right]^{-0{,}443} K^{-0{,}114}$$

$$P'_K = 0{,}7835\, e^{0{,}065\, t} \left[0{,}2 + 0{,}8 \left(\frac{K}{N}\right)^2\right]^{-1{,}443} K^{-0{,}114}$$

Como fácilmente se deduce de las anteriores expresiones, tanto la productividad media como la marginal son magnitudes decrecientes a medida que crece la cantidad de factor utilizado (hay que admitir por hipótesis que $N =$ $=$ constante) y el progreso tecnológico (crecimiento de la variable semiespecificada t) implica, *ceteris paribus,* un crecimiento de dichas productividades (desplazamiento de la función de producción hacia arriba).

Naturalmente, esto lleva consigo que la posibilidad de sustituir un factor por otro, aun cuando es técnicamente posible hacerlo con facilidad, no puede llevarse demasiado lejos, porque la productividad del factor sustituyente decrece asintóticamente a cero. Esto mismo puede ser contemplado por medio de la relación marginal de sustitución. Recordamos que ésta se definía como la cantidad de factor X_1 que hace falta utilizar para suplirse una unidad de factor X_2 sin que varíe la cantidad de output conseguido. En el caso de CES, dicha relación vale:

$R^K_N =$ relación marginal de sustitución de factor K por factor $N = \dfrac{1 - \delta}{\delta}$ $\left(\dfrac{K}{N}\right)^{\rho+1}$. Para nuestro modelo, la relación se concreta en los siguientes valores:

$$R^K_N = 0{,}4 \left(\frac{K}{N}\right)^3$$

Cuando la relación capital ganadero - piensos crece, la relación marginal de sustitución de K por N crece. Es decir, por cada unidad que sustituimos de capital ganadero debe aportarse cada vez un número mayor de unidades de «piensos». Esto implica que el proceso deberá detenerse para alguna relación K/N.

Sección VI

El resumen del trabajo puede concretarse así: se consideran en la primera sección los principales problemas estadísticos que implican la estimación de modelos que contengan las funciones CES. Se exponen las particularidades de los diversos métodos utilizados en las estimaciones y sus defectos y ventajas particulares. En definitiva se retienen tres métodos, dos basados en aproximaciones por desarrollos por series de Taylor y uno (el de Feldstein) consistente en una aproximación por «prueba y repite».

La segunda etapa del trabajo comienza con la elección de variables de análisis, y se trata de justificar tal elección para el caso de la ganadería española. Se consideran los problemas generales de la agregación y de la dimensionalidad, y se expone detenidamente la forma en que han sido calculadas las variables y las fuentes de datos utilizados. Se finaliza con la aplicación de los criterios propuestos a los modelos generales elegidos, a efectos de especificar los modelos concretos que deberán ser estimados, que resultan ser de dos tipos: uniecuacionales y biecuacionales, en cada uno de ellos se han agregado las variables (homogenización) por dos criterios, que se han denominado: económico y semitécnico, respectivamente. Resulta, pues, que deberán ser estimados cuatro modelos diferentes.

La sección III se ha dedicado a la estimación propiamente dicha de los modelos. Dicha estimación se ha llevado a cabo por tres métodos estadísticos, conocidos abreviadamente con los nombres de Kmenta (I), Kmenta (II) y Feldstein. Escuetamente, el primero consiste en estimar una ecuación aproximada a la propuesta, cual es la que se obtiene desarrollando por serie de Taylor la función

$$Y = Ae^{\lambda t}[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)N^{-\rho}]^{-\nu/\rho}$$

para el caso particular $\rho = 0$ y despreciar los términos de orden superior a dos.

El segundo ha consistido en desarrollar, por serie de Taylor, la mencionada función para un conjunto arbitrario de valores de los parámetros, tal como $\theta_0(A_0, \lambda_0, \delta_0, \rho_0, \nu_0)$, despreciando los términos de orden superior al primero. A continuación se estima por mínimos cuadrados ordinarios la función aproximada $\langle Y \rangle$, y se somete el conjunto de parámetros obtenidos:

$$\theta_1(A_1, \lambda_1, \delta_1, \rho_1, \nu_1)$$

a la siguiente norma de convergencia

$$\left| \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0} \right| \leqslant \varepsilon$$

siendo ε un número arbitrario, suficientemente pequeño (en nuestro caso $\varepsilon = 0{,}01$). Si se cumple la norma $\hat{\theta}_1$, es el conjunto de parámetros estimado más eficaz. Si no la cumple, se demuestra (aunque nosotros no lo hacemos), que sustituyendo θ_0 por $\hat{\theta}_1$ en el desarrollo en serie de Taylor se llega a obtener, tras repetidas iteraciones, un conjunto $\hat{\theta}_n(\hat{A}_n, \hat{\lambda}_n, \hat{\rho}_n, \hat{\delta}_n, \hat{\nu}_n)$ que cumple la norma, y que es el más eficaz posible. Obviamente, puede mejorarse la estimación haciendo cada vez más pequeño. El método de Feldstein consiste en dar valores arbitrarios al par ρ, δ, en un intervalo suficientemente amplio; por ejemplo:

$$-1 < \rho < 3 \qquad \text{y} \qquad 0 < \delta < 1$$

variando de décima en décima. Los campos de variabilidad posible son:

$$-1 < \rho < \infty \qquad \text{y} \qquad 0 < \delta < 1$$

siendo ρ y δ variables continuas. De esta manera pueden aplicarse los mínimos cuadrados ordinarios para estimar el resto de los parámetros. El par (ρ, δ) que proporcione menor varianza residual será el elegido. La aplicación del método implica la realización de 400 estimaciones mínimo cuadráticas ordinarias.

Los resultados de las estimaciones llevan a la condición de que sólo la realizada por el método de Feldstein para el modelo uniecuacional, según el criterio económico, permite conseguir estimadores de los parámetros insesgados, así como que el modelo no presente autocorrelación. Existe heteroscedasticidad a un nivel no muy elevado.

La interpretación del modelo estimado puede resumirse en los siguientes puntos:

i) En el crecimiento de la producción total ganadera el factor «residual» ha jugado el papel decisivo. Traducido a cifras, puede estimarse que dicho factor residual, o progreso tecnológico en sentido amplio, ha pasado de 100 en 1950 a 490 en 1970.

ii) Los piensos han jugado un papel más importante en el crecimiento del output, que el incremento del capital ganadero.

iii) La elasticidad de sustitución entre capital ganadero y piensos es relativamente baja, del orden de 0,33.

iv) La producción ganadera se ha llevado a cabo en el período considerado (1950-1970) con rendimientos constantes a escala.

Con el modelo estimado hemos realizado una interpolación para obtener los valores del capital ganadero en los años 1952, 1953, 1954, 1956, 1957, 1958 y 1959, años para los cuales se carece de censo y en los que no ha sido posible hacer una estimación fiable de los stocks ganaderos. Obviamente, las estimaciones obtenidas deben ser consideradas con las naturales reservas.

Departamento de Economía Agraria
del C.S.I.C. (Madrid)

BIBLIOGRAFÍA

BECKMANN, M. J., y SATO, R.: «Aggregate Production Functions and Types of Technical Progress: A Statistical Analysis», *The American Economic Review,* pp. 88-101.

BODKIN, R. G., y KLEIN, L. R.: «Non linear Estimation of Aggregate Production Function», *Review of Economics and Statistics,* 1967, pp. 28-44.

BROWN, B. W.: «Test for Cobb-Douglas and CES Production Functions», *International Economic Review,* vol. 11, núm. 1, febrero 1970, pp. 77-83.

BROWN, M., y CANI, J. S.: «A Mesure of Technological Employement», en *Review of Economics and Statistics,* vol. 45, núm. 4, agosto 1963, pp. 386-394.

CHENERY, H. B.: «Engeenering production function», en *Quartely Journal of Economics,* 1949, pp. 507 ss.

CLARK, E.: «Non-Linear Programming and Non-Linear Regressions Producers», *Journal of Farm Economics,* vol. 44, núm. 1, febrero 1962, pp. 100-114.

DHRYMES, P. J.: «Adjustment Dynamics and the Estimation of the CES Class of Production Functions», *International Economic Review,* vol. 8, núm. 2, junio 1967, pp. 209-217.

DHRYMES, P. J.: «Some extensions and tests for the CES class of production functions», en *Review of Economics and Statistics,* vol. 47, noviembre 1965, pp. 357 a 366.

FELDSTEIN, M. S.: «Alternative Methods of Estimating a CES Production Function for Britain», *Economica,* núm. 136, noviembre 1967, pp. 348-395.

FERGUSON, C. E.: «Time Series Production Function and Technological Change in American Manufacturing Industry», en *Journal of Political Economy,* 1965, pp. 135-155.

FERGUSON, C. E.: «Cross-Section Production Functions and the Elasticity of Substitution in American Manufacturing Industry», *Review of Economics and Statistics,* vol. 45, núm. 3, agosto 1963, pp. 305-313.

GUPTA, S. B.: «Some tests of the international comparisons of factory efficiency with the CES production functions», *Review of Economics and Statistics,* vol. 50, núm. 4, 1968, pp. 470-476.

HALTER; CARTER, y MACKING: «A note of the trascendental production function», *Journal of Farm Economics,* 1962.

HODGES, D. J.: «A note on estimation of Cobb-Douglas and CES production function models», *Econometrica,* vol. 37, núm. 4, octubre 1969, pp. 721-725.

KMENTA, J.: «On the estimation of the CES production function», en *International Economic Review,* vol. 8, núm. 2, junio 1967, pp. 180-192.

KO NIJN, H. S.: «Estimation of an average production function from surveys», *Economic Record,* núm. 35, 1959, pp. 118.

KURZ, M., y MANNE, A.: «Engeenering estimates of capital-labor substitution in Metal Machinery», en *American Economic Review,* vol. 53, núm. 4, septiembre 1963, pp. 662 ss.

LOMAX, K. S.: «An Agricultural production function for the U. K. 1924 to 1947», *Manchester School of Economic and Social Studies,* vol. 17, enero 1949, pp. 146-160.

MADALA, G. S., y KADANA, J. B.: «Somo notes on the estimation of CES production functions», en *Review of Economic and Statistics,* 1966, pp. 340-344.

MINSOL, A.: «Some tests of the international comparaisons of factory efficiency with the CES production function. A Reply», *Review of Economics and Statistics,* vol. 50, núm. 4, 1968, pp. 477-479.

NERLOVE, M.: «Notes on Recent Empirical Studies of the CES and Related Functions», *Technical Report n.º 13. Institut for Mathematical Studies in the Social Sciencies,* Stanford University, julio 1965.

NERLOVE, M.: «Recent theoretical and empirical developments on CES and related production function», en *N.B.E.R.,* Princenton, 1967, pp. 75 ss.

TSURUMI, H.: «Non-linear Two-Stage Least Squares Estimation of CES Production Func-

tions Applied to the Canadian Manufacturing Industries, 1926-1939, 1946-1967», *Review of Economics and Statistics,* mayo 1970, vol. 52, pp. 200-207.
ZAREMBKA, P.: «On the empirical relevance of the CES production function», *Review of Economics and Statistics,* vol. 52, febrero 1970, pp. 47-53.

ANEXO I

Homogenización de la producción ganadera por criterios técnicos (correlación del valor energético por medio de un coeficiente de calidad proteínica).

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ las cantidades físicas (peso) de los distintos grupos de productos que se obtienen de la ganadería. Con un superíndice, de la forma $y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1$ se denota el año al que están referidos. De manera que la cantidad total de producción puede expresarse genéricamente por:

$$Y^1 = a^1y_1^1 + b^1y_2^1 + \ldots + n^1y_n^1$$

siendo $a, b, \ldots, n$, los coeficientes de homogenización (cuando dichos coeficientes son precios Y se expresa en dinero; cuando son contenidos energéticos Y^t viene medido en energía, y cuando los coeficientes son contenidos unitarios proteínicos, el output total viene expresado en peso de proteínas.

Tratamos de encontrar un criterio de homogenización que tenga en cuenta simultáneamente la cantidad de energía y la calidad proteínica.

Sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ los contenidos energéticos unitarios de las unidades de peso elegidas (por ejemplo, kcal/kg de producto). Asimismo, por $p_1, p_2, \ldots, p_n$ designaremos el valor unitario proteínico (por ejemplo, g de proteína/kg de producto). Podemos construir un índice que mida el valor unitario global proteínico (media ponderada) del output de un año t

$$I^t = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i^t}{\sum_{i=1}^{n} y_i^t}$$

Por otra parte,

$$Y^t = \sum_{i=1}^{n} e_i y_i^t \qquad , \text{y}$$

el nuevo valor energético corregido es: $Y^t = I^tY^t$

Los datos de valores energéticos y proteínicos unitarios de los productos: carnes de diversas variedades, leches de las tres especies y huevos, se han tomado de Casares.[1] El cálculo del valor energético del trabajo animal supone una complicada auxiliar, que se ha resuelto así:

1.° Se reducen a obradas de caballo las obradas de otros «tipos», para lo cual se emplean las siguientes relaciones de equivalencia:[2]

1. R. CASARES, Tratado de Bromatología 3.ª ed., Ed. Casares, Madrid, 1959, pp. 178-186.
2. FÉDÉRATION NATIONAL DES ORGANISMES DE GESTION AGRICOLES, *Définition des Termes Usuels,* p. 39.

100 kg de vacuno = 0,10 UTA
100 kg de equino = 0,14 UTA

siendo UTA = Unidad tracción animal.

2.° Se pasa de los equivalentes UTA a UTC (unidad tracción caballar) dividiendo cada equivalente por el de la obrada de caballos en UTA.

3.° Se calcula el equivalente energético de 1 UTC. Para ello se parte de las siguientes hipótesis:

a) Una obrada de caballos es el trabajo medio desarrollado por un par de caballos medios trabajando ocho horas al día.

b) El peso medio del caballo se supone igual a 550 kg.

c) Se supone,[3] que las necesidades alimenticias para trabajos son iguales a las necesidades de mantenimiento. Es decir, se necesitan 4,25 UF/caballo para el trabajo.

d) Se admite,[4] que el rendimiento energético bruto para el trabajo es del 14 por ciento. Por lo que la energía del trabajo desarrollado vale $0{,}14 \times 4{,}25 \times 2$ UF. Es decir, 1,155 UF.

Teniendo en cuenta que 1 UF = 1,65 Th = $1{,}65 \times 10^3$ kcal, la energía de una obrada de trabajo caballar es igual a 1.906 kcal. Todos estos coeficientes se han agrupado en el cuadro A.2. En el cuadro A.4 figuran los índices de calidad proteínica calculados de la manera ya relatada. Para el trabajo animal, dichos índices valen 0 todos los años, por lo que se incluye en Y el valor energético del trabajo sin modificaciones. En cambio no se incluye, en absoluto, el valor energético del estiércol, lo cual varía el Y total, pero no parece que éste sea un inconveniente muy grave. Los datos de producciones físicas son los de los «Anuarios de Producción Ganadera»,[5] desde el año 1955 a 1970; y los del «Producto Neto de la Agricultura Española»[6] desde 1950 a 1954.

Cuadro A.1

Equivalentes en UTA de las parejas de los diversos tipos de ganado de tracción

Tipo	Peso medio	Equivalentes en UTA
Yeguas	950	1,32
Poneys	600	0,74
Mulos	900	1,26
Asnos	500	0,70
Toros	1.200	1,20
Bueyes	1.300	1,30
Vacas	800	0,80
Caballos	1.100	1,54

Fuente: Elaborado con datos medios de peso de las cabezas a partir de las equivalencias en el texto.

3. Elvio Borgioli, *Alimentación del ganado,* Ed. Gea, Barcelona, 1962, pp. 469 ss.
4. *Ibid.*, p. 248.
5. Ministerio de Agricultura, *op. reseñada,* Madrid, años mencionados.
6. Ministerio de Agricultura, *op. cit.*

CUADRO A.2

Cálculo de la energía de las diversas clases de obradas

Tipo de yunta	Equivalencia en UTC	Equivalencia en energía (kcal)
Yeguas	0,86	1.689
Poneys	0,48	943
Mulos	0,82	1.610
Asnos	0,45	884
Toros	0,78	1.032
Bueyes	0,85	1.669
Vacas	0,52	1.021
Caballos	1,00	1.906

FUENTE: Véase texto.

CUADRO A.3

Valores energético y proteínico de los productos ganaderos

Tipo producción	Calorías unitarias kcal/kg	kcal/obrada	Proteínas unitarias kg/100 kg
Carne			
Vacuno mayor	2,25		20,5
Vacuno menor	1,70		19,0
Ovino mayor	1,50		18,5
Ovino menor	1,25		14,5
Caprino mayor	1,30		21,0
Caprino menor	1,10		20,0
Porcino mayor	3,18		15,0
Porcino menor	2,50		12,0
Equino	2,35		22,0
Aves	1,40		27,0
Leche			
Vaca	0,68		3,5
Oveja	1,02		3,6
Cabra	0,69		3,7
Huevos *	0,96		11,9
Trabajo **			
Toros		1.532,0	—
Bueyes		1.669,0	—
Vacas		1.021,0	—
Caballos		1.964,0	—
Yeguas		1.689,0	—
Poneys		943,0	—
Mulos		1.610,0	—
Asnos		884,0	—

* kcal/docena.
** kcal/obrada.

CUADRO A.4

Valor de la producción total ganadera en energía corregida por un índice de calidad proteínica

Años	Valor energético (en millones de kcal)	Relación proteínas peso kg prote/kg)	Relación valor energético de producción con proteínas. Valor energético producción sin proteínas	Valor de la producción corregida (en millones de kcal)
1950	551.254,5	0,053.379	0,004.879	143,6
1951	349.822,1	0,051.304	0,008.153	146,3
1952	347.365,4	0,055.141	0,009.362	179,3
1953	347.760,1	0,053.212	0,009.801	181,4
1954	336.928,4	0,053.522	0,010.691	192,8
1955	333.379,4	0,054.584	0,010.494	191,0
1956	286.045,8	0,053.260	0,012.468	189,9
1957	282.538,7	0,054.226	0,013.270	203,3
1958	375.707,5	0,057.549	0,010.022	216,7
1959	387.737,9	0,059.648	0,009.752	225,5
1960	379.996,0	0,058.098	0,010.587	233,7
1961	420.843,4	0,060.295	0,010.355	262,8
1962	395.846,2	0,062.198	0,011.499	285,8
1963	371.959,3	0,063.612	0,013.962	330,4
1964	351.561,3	0,065.416	0,015.084	346,9
1965	326.842,1	0,062.521	0,016.095	328,9
1966	312.446,9	0,063.806	0,020.005	398,8
1967	290.174,6	0,068.448	0,022.536	447,6
1968	277.289,6	0,067.409	0,023.616	441,4
1969	267.444,5	0,067.673	0,026.304	476,1
1970	254.187,3	0,069.925	0,029.238	519,7

ANEXO 2

Homogenización de los piensos por criterios técnicos (corrección del valor energético por medio de un coeficiente de calidad proteínica)

Sean y_1, y_2, ..., y_n los pesos de los distintos grupos de piensos consumidos por la ganadería. Con un superíndice de la forma y^t_i se denota el año al que están referidos. La cantidad total de piensos consumidos puede expresarse genéricamente por

$$Y^t = a^t y^t_1 + b^t y^t_2 + \dots + n^t y^t_n$$

siendo a^t, b^t, ..., n^t, los coeficientes de homogenización, que pueden ser los precios de cada año u otros coeficientes arbitrarios. Cuando los coeficientes son los precios, y^t viene medido en dinero. Cuando son los contenidos energéticos (por ejemplo, expresados en UF/kg), el valor de los piensos está medido en energía, y los a^t, b^t, ..., n^t son iguales

Cuadro A.5

Coeficiente fertilidad-viabilidad aparente

Especies	1950	1951	1952	1953	1954
Vacuno					
Vacas madre	1.869.326				
Animales sacrificados	800.914	728.389	1.179.155	1.150.159	1.216.335
Exportaciones vivo			4.300		
Importaciones vivo					
Censo	3.112.492				
Coeficiente fertilidad-viabilidad					
Δ Censo estimado	160.416				
Censo estimado	—	3.272.907			
Ovino					
Ovejas madre	12.012.346				
Animales sacrificados	6.168.436	5.909.722	8.626.833	7.129.223	7.659.032
Exportaciones vivo					
Importaciones vivo					
Total animales	16.343.821				
Coeficiente fertilidad-viabilidad			0,604		
Δ Censo estimado	1.087.020				
Censo estimado	—	17.430.841			
Caprino					
Cabras madre	3.049.082				
Animales sacrificados	1.408.317	1.340.888	1.461.278	1.458.220	1.540.747
Exportaciones vivo					
Importaciones vivo					
Total animales	4.135.404				
Coeficiente fertilidad-viabilidad		0,411			
Δ Censo estimado	— 155.145				
Censo estimado	—	3.980.259			
Porcino					
Cerdos de vientre	503.575				
Animales sacrificados	1.646.361	1.606.361	2.174.674	2.207.631	2.258.343
Exportaciones vivo	400	1.600	1.000	1.200	1.600
Importaciones vivo	—	—	—	200	—

1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
1.588.438					1.915.794		1.968.294
1.166.509	986.442	956.048	936.859	1.044.925	1.177.729	1.231.012	1.120.770
			500				
2.742.037					3.640.342		3.682.946
		0,618			0,625		
— 184.955					19.642		
—	2.557.082				—	3.659.984	
11.292.037					13.148.615		12.233.115
7.435.742	7.624.277	7.873.374	7.401.962	8.323.358	10.662.739	10.186.356	9.800.646
15.933.140					22.622.199		20.098.858
		1,142			0,860		
5.459.764					— 645.069		
—	21.392.904					21.977.020	
2.118.120					1.962.328		1.594.591
1.512.503	1.355.819	1.390.653	1.264.851	1.284.241	1.391.916	1.294.060	1.270.080
3.096.663					3.299.632		2.599.443
		0,651			0,479		
— 133.607					— 451.961		
—	2.963.056				—	2.847.671	
461.108					459.008		530.064
2.152.534	2.332.073	2.496.803	2.551.260	2.684.616	2.985.709	2.678.285	2.676.435
1.600	1.000	1.200	1.200	1.300	1.600	1.800	1.800
100	200	—	—	200	200	200	200

Especies	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
Total animales	2.688.027					2.792.630					6.031.904		6.118.374
Coeficiente fertilidad-viabilidad			4,174					7,068				5,930	
Δ Censo estimado	455.161					1.105.077					262.392		
Censo estimado	—	3.143.188				—	3.897.707				—	6.294.296	
Equino													
Burras y yeguas	460.789					470.248					420.558 *		145.756
Animales sacrificados	41.959	46.146	44.955	52.802	75.798	106,079	135.087	146.456	136.603	125.125	114.355	125.065	145.756
Exportaciones vivo					3	106	95	95	95	323			
Importaciones vivo					1.946	2.080	1.958	1.384	1.565	1.167			
Total animales	2.463.654					2.352.696	0,275				2.349.157		2.336.965
Coeficiente fertilidad-viabilidad			0,088									0,307	
Δ Censo estimado	— 1.409.568					25.213					14.756		
Censo estimado	—	2.462.244					2.377.909				—	2.363.913	
Aves													
Ponedoras	20.700.000					21.100.000					32.000.000		39.000.000
Aves sacrificadas	6.500.000 *	680 *	7.100.000 *	7.400.000	6.258.343	6.989.717	7.222.262	7.812.732	7.784.579	8.350.545	10.201.456	80.362.889	112.706.447
Saldo comercio Exp.						23.400.000							
Censo	23.000.000										32.400.000		406.000.000
Coeficiente fertilidad-viabilidad			3,360					4,819				31,000	
Δ Censo estimado	500.000					3.200.000							
Censo estimado	—	23.500.000										36.100.000 *	
Censos estimados													
Vacuno	—	3.272.900					2.557.000					3.660.000	
Ovino	—	2.178.900					2.674.100					2.087.800	
Caprino	—	497.500					370.400					356.000	
Porcino	—	785.800					974.400					1.576.300	
Equino	—	1.390.000					1.282.000					1.339.200	
Aves	—	48.400					53.200					72.200	
Total		8.173.600					7.911.100					9.091.500	

* Incluyen las crías.

Fuente: Elaboración a partir de datos básicos del Ministerio de Agricultura, *Censos de la Ganadería Española* y *Anuarios de las Producciones Ganaderas*, y Ministerio de Hacienda, *Anuarios del* para todos los años. En caso de que a^t, b^t, ..., n^t fuesen los contenidos unitarios en proteínas (por ejemplo, kg de proteína/kg de pienso), y^t viene medido en proteínas.

Vamos a construir unos coeficientes de evaluación que tengan en cuenta simultáneamente la riqueza energética de los piensos y su calidad proteínica. Sean e_1, e_2, ..., e_n, los contenidos energéticos de las unidades de peso elegidas (por ejemplo, UF/kg). Asimismo, por p_1, p_2, ..., p_n designaremos el valor unitario proteínico (por ejemplo, en kg de proteínas/kg). Construimos el siguiente índice para cada año

$$I^t = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i^t}{\sum_{i=1}^{n} y_i^t}$$

Por otra parte,

$$Y^t = \sum_{i=1}^{n} e_i y_i^t \quad , \qquad \text{y}$$

el nuevo valor energético corregido con el índice de calidad proteínica es

$$Y^t = I^t Y^t$$

Anexo 3

Estimación de los censos ganaderos de los años 1951, 1956 y 1961

La estimación se realiza a partir de al siguiente expresión general:

$$L_t = \frac{S_t + AK + E_t - I_t}{A_t \cdot n}$$

en donde:

L_t = Coeficiente de fertilidad-viabilidad.
S_t = Censo de ganado sacrificado en el año t (en cabezas).
AK = Incremento del censo en el período t a $t + 1$.
E_t = Cabezas exportadas.
I_t = Cabezas importadas.
A_t = Hembras potencialmente reproductoras.
n = Crías del período.

Dicha expresión se aplica a cada una de las especies censadas (vacuno, ovino, caprino, porcino, equino y aves). De la anterior relación puede calcularse AK en función de los demás parámetros. Para que la fórmula sea operativa es preciso concretar cada uno de éstos, y todos, excepto L_t, se obtienen como datos publicados.[1] Sin embargo, el valor de L_t no se conoce y es preciso estimarlo previamente. Para ello se aplica la expresión general mencionada a los períodos intercensados 1950-1955, 1955-1960, 1960-1962, y se

1. S_t y A_t del censo de la ganadería del año de partida (1950, 1955 y 1960, respectivamente). E_t e I_t se obtienen de los anuarios del Comercio Exterior de España.

obtienen unos valores medios de los coeficientes de fertilidad-viabilidad. En el cuadro A.5 está contenido el detalle de los cálculos efectuados, así como los incrementos censales y censos estimados de los años 1951, 1955 y 1956.

En general, puede hacerse la observación de que las estimaciones están sesgadas al alza, por no haberse deducido las crías nacidas y muertas durante el año, así como el decrecimiento del censo ocasionado por enfermedades, es decir, se incluyen las crías estimadas, según se especifica en otro anexo.

Una vez conocidas las cabezas totales de cada especie que componen el censo estimado, se aplican unos coeficientes para reducirlas a UG. Estos coeficientes son las medias aritméticas de las equivalencias en UG según especies, sexos y edades, utilizadas en el cálculo del capital ganadero (puede verse texto). Los resultados obtenidos son los siguientes:

CUADRO A.6

Censos estimados
(En millares de UG) *

Especies	1951	1956	1961
Vacuno	3.272,9	2.557,0	3.660,0
Ovino	2.178,9	2.674,1	2.087,8
Caprino	497,5	870,4	356,0
Porcino	785,8	974,4	1.576,3
Equino	1.390,0	1.282,0	1.339,2
Aves	48,4	53,2	72,2
TOTALES . . .	8.173,6	7.911,1	9.091,5

* Incluyen las crías.

ANEXO 4

Estimación de las crías de ganado vacuno, ovino, caprino, porcino y equino para los años 1950 y 1955 y las del ganado ovino en 1960, 1962, 1963 y 1964.

Para estimar las crías de las especies vacuno, ovino, caprino, porcino y equino en los censos de 1950 y 1955 se utiliza el método ya mencionado en otro anexo, que hemos denominado «del coeficiente de fertilidad-viabilidad». Como anteriormente ya se calculó dicho coeficiente, ahora basta con aplicar la conocida expresión general para estimar las crías, bien entendido que en dicha expresión el significado de los símbolos varía ligeramente. En efecto, L_t sigue siendo el coeficiente de fertilidad-viabilidad, A_t el número de hembras-madre. S_t significa, ahora, el número de crías nacidas y sacrificadas durante el año (es decir, terneras, corderos lechales, ternascos y pascuales, cabritos y crías de porcino). E_t e I_t son, respectivamente, las exportaciones e importaciones de crías vivas durante el año t, y el saldo se considera prácticamente nulo. Las estimaciones obtenidas son las del cuadro A.7.

Para realizar la estimación de las crías de los años 1950 y 1955, es preciso calcular

CUADRO A.7

Estimaciones de las crías de las especies

Conceptos	1950	1955	1960	1962	1963	1964
VACUNO						
Vacas madre	1.869.326	1.588.438	1.915.794	1.968.294		
Coefic. fertilidad-viabilidad	0,542	0,618	0,625			
Terneras sacrificadas	445.000 *	642.000 *	574.080	574.240		
Crías nacidas	934.663	981.655				
Saldo neto crías	489.663	339.655				
Valor en UG	221.000	152.400				
OVINO						
Ovejas madre	12.012.346	11.292.037	13.148.615	12.223.115	12.141.576	11.455.681
Coefic. fertilidad-viabilidad	0,604	1,142	0,860	0,833	0,682	0,890
Corderos lechales sacrificados	864.000 *	1.046.000 *	1.412.508	1.595.701	1.601.733	1.620.261
Crías nacidas	7.255.457	12.895.506	11.307.809	10.181.855	8.280.555	10.195.556
Saldo neto crías	6.391.439	11.849.506	9.895.301	8.586.154	6.678.822	8.575.295
Valor en UG	287.000	584.600	487.500	386.000	300.000	385.000
CAPRINO						
Cabras > 2 años	3.049.082	2.118.120	1.962.328	1.594.591		
Coefic. fertilidad-viabilidad	0,411	0,651	0,469			
Cabritos sacrificados	680.000 *	651.000 *	589.314	503.677		
Crías nacidas	1.253.173	1.318.896				
Saldo neto crías	573.173	667.896				
Valor en UG	25.800	30.000				
PORCINO						
Cerdas vientre	503.575	170.248	459.008	530.064		
Coef. fert. viab.	1.174	7.068	5.930			
Lechones sacrificados	21.100 *	27.500 *	66.892	28.093		
Lechones nacidos	2.101.922	3.327.537				
Saldo neto lechones	2.080.822	3.300.037				
Valor en UG	72.800	115.900				
EQUINO						
Yeguas vientre y burra	460.789	470.248	420.558 *	415.912 *		
Coef. fert. viabil.	0,088	0,275	0,307			
Crías sacrificadas	—	—	—			
Crías nacidas	40.594	129.318				
Saldo neto crías	40.594	129.318				
Valor en UG	14.200	49.900				

* Estimada.

FUENTES: Elaboración a partir de los datos básicos del Ministerio de Agricultura, *Censos de la Ganadería Española* y del Ministerio de Hacienda, *Anuario Estadístico del Comercio Exterior*.

previamente el coeficiente de fertilidad-viabilidad aplicable a esos años; según la expresión ya conocida del anexo anterior, en donde los símbolos tienen ahora este significado:

L_t = Coeficiente de fertilidad-viabilidad (medio del período t).
S_t = Número total de animales sacrificados en el período t.
AK_t = Variación censal en el período t.
E_t = Exportación de animales en el período t.
I_t = Importación de animales en el período t.
A_t = Número de ovejas-madre (medio del período t).

Calculando L_t, puede hacerse una estimación de las crías viables, multiplicando A por L_t. A continuación se resta el número de crías sacrificadas en el período y se suma el valor algebraico del resultado del comercio exterior de crías. Como el comercio exterior de animales vivos resulta prácticamente inexistente, el problema se reduce a restar del total de *crías potencialmente nacidas* las sacrificadas. Es muy probable que la estimación esté sesgada al alza porque no se deducen las crías fallecidas por enfermedades.

El cuadro A.8 contiene los datos utilizados y las estimaciones obtenidas.

CUADRO A.8

Coeficiente fertilidad-viabilidad aparente para los años 1962, 1963, 1964 y 1965

Conceptos	1962	1963	1964	1965
Ovejas madre	12.223.115	12.141.576	11.455.681	
Animales sacrificados	9.800.646	9.657.707	10.596.611	10.807.540
Exportación animales vivos	47.896	60.000 *	117.488	1.956
Importación animales vivos	568	1.200 *	2.342	2.572
Censo total	20.098.858	19.863.125	17.617.216	17.073.322
Coefic. fert. viab.	0,833	0,682	0,890	

* Estimada.
FUENTES: Las mismas del cuadro A.7.

Finalmente, hemos confeccionado un cuadro que contiene un resumen de los resultados obtenidos:

CUADRO A.9

Estimación de las crías
(En miles de UG)

Especies	1950	1955	1960	1962	1963	1965
Vacuno	221,0	152,4	—	—	—	—
Ovino	287,0	584,6	487,5	386,0	300,0	385,0
Caprino	25,8	30,0	—	—	—	—
Porcino	72,8	115,9	—	—	—	—
Equino	14,2	49,9	—	—	—	—

FUENTE: Las mismas del cuadro A.7.